

УДК 514.75

Е.А.М и т р о ф а н о в а

ИНВАРИАНТНАЯ СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье решается задача построения расслоенного пространства со структурной группой $A_m^2(n)$ преобразований и соответствующей связностью (A -связностью), инвариантно присоединенной к интегралу, распространенному по произвольной поверхности пространства соприкасающихся элементов.

Рассмотрим интеграл типа $S = \int_{S_m} f(x^j, x_\alpha^i, x_{\alpha\beta}^i) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, (1)

где

$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha}, \quad x_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (j = \overline{1, n}; \alpha = \overline{1, m}; i, j = \overline{m+1, n}),$$

распространенный по некоторой области поверхности S_m в пространстве элементов касания второго порядка многообразия V_n . Дифференциальные уравнения поверхности $S_m \subset V_n$ при соответствующей специализации репера имеют вид:

$$\omega^j = 0, \quad \omega_\alpha^i = 0, \quad \omega_{\alpha\beta}^i = P_{\alpha\beta}^i \omega^j. \quad (2)$$

Запишем интеграл (1) через инвариантные формы ω^α :

$S = \int_{S_m} F \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$, где поле F удовлетворяет уравнению

$$\Delta F = dF - F \omega_\alpha^i = F_x \omega^x + F_i \omega_\alpha^i + F_{i\alpha}^{\beta} \omega_\beta^i. \quad (3)$$

Здесь $\omega^x, \omega_\alpha^i, \omega_{\alpha\beta}^i$ — структурные формы расслоения реперов $H^P(V_n)$ с известными уравнениями структуры.

Наша задача заключается в том, чтобы фундаментальными объектами поля F возможно низшего порядка охва-

тить поле объекта A -связности. Она решается при помощи канонизации объектов поля F , в результате которой формы $\{\omega_k^\beta, \omega_{\beta\gamma}^\alpha, \omega_{\beta\gamma}^\alpha, \omega_{\alpha\beta}^k, \omega_{\alpha\beta}^k, \omega_{\alpha\beta\gamma}^i\}$ выразятся через базисные формы $\omega^R(\omega^x, \omega_\alpha^i, \omega_{\alpha\beta}^i)$. Этот набор форм содержится в той оставшейся части, на которую отличаются структурные уравнения базисных форм ω^R , а также форм $\omega_k^\beta, \omega_{\beta\gamma}^\alpha$, которые в будущем станут формами связности, от структурных уравнений группы $A_m^2(n)$. Для нахождения форм (4) дифференцируем внешним образом уравнение (3), получим выражение вида

$$\Delta F_x \wedge \omega^x + \Delta F_i \wedge \omega_\alpha^i + \Delta F_{i\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \quad (5)$$

откуда по лемме Кардана имеем

$$a/ \Delta F_k^\beta = dF_k^\beta + \{\alpha\beta\}_k - F_k^\beta \omega_\gamma^\lambda = F_k^\beta \omega_\gamma^\lambda + F_k^\beta \omega_\lambda^\mu + F_k^\beta \omega_\mu^\nu + F_k^\beta \omega_\nu^\gamma, \\ b/ \Delta F_k^i = dF_k^i + \{\alpha\beta\}_k - F_k^\beta \omega_\beta^i - F_k^\beta \omega_{\beta\gamma}^\alpha - F_k^\beta \omega_{\beta\gamma}^\alpha = F_k^\mu \omega_\mu^\alpha + F_k^\beta \omega_\mu^\nu + F_k^\beta \omega_\nu^\gamma, \quad (6)$$

$$c/ \Delta F_{i\alpha}^{\beta} = dF_{i\alpha}^{\beta} - F_\beta \omega_\alpha^i - F_\beta \omega_{\alpha\beta}^i - F_\beta \omega_{\alpha\beta}^i = F_{i\alpha}^{\beta} \omega_\alpha^i, \\ \text{где } \tilde{\omega}_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \omega_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \delta_\lambda^\alpha + \delta_\mu^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^i - \delta_\mu^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^i; \{\alpha\beta\}_k = F_k^\beta \omega_\beta^i - F_k^\beta \omega_\beta^i. \quad (7)$$

Аналогично расписываются все другие фигурные скобки. Второе (частичное продолжение уравнения (5)) даст нам уравнения

$$a/ \Delta F_{k\ell}^{\alpha\beta} = dF_{k\ell}^{\alpha\beta} + \{\alpha\beta\}_{k\ell} - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\lambda = F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\lambda, \\ b/ \Delta F_{k\ell}^{\alpha\beta} = dF_{k\ell}^{\alpha\beta} + \{\alpha\beta\}_{k\ell} - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\sigma^\sigma + F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\sigma^\sigma - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\mu^\nu - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\mu^\nu = 0, \quad (8) \\ c/ \Delta F_{k\ell}^{\alpha\beta} = dF_{k\ell}^{\alpha\beta} + \{\alpha\beta\}_{k\ell} - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^i - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^i - F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^i = F_{k\ell}^{\alpha\beta} \omega_\alpha^i,$$

где по примеру формулы (7)

$$\{\alpha\beta\}_k = F_k^\beta \omega_\beta^i - F_k^\beta \omega_{\alpha\beta}^i. \quad (9)$$

Будем рассматривать тензор $F_{k\ell}^{\alpha\beta}$ как двухиндексный тензор с парой индексов $(\alpha\beta), (\lambda\mu)$. Налагая на поле F первое условие невырожденности

$$\Phi = \det \| F_{k\ell}^{\alpha\beta} \|^{\lambda\mu} \neq 0, \quad (10)$$

можно получить обратный тензор

$$F_{k\ell}^{\alpha\beta} \cdot F_{\tau\sigma}^{\lambda\mu} = \delta_{(\alpha\beta)}^{(\lambda\mu)}. \quad (11)$$

Для величин

$$F_{\lambda\mu e}^i = F_{\lambda\mu}^i \cdot F_e^{\alpha\beta}, \quad (12)$$

дифференциальные уравнения содержат формы $\tilde{\omega}_{\lambda\mu e}^i$ в свободном виде

$$\Delta F_{\lambda\mu e}^i = dF_{\lambda\mu e}^i + \{F_{\lambda\mu e}^i\} + F_{\lambda\mu e}^i \omega_\kappa^\beta - \tilde{\omega}_{\lambda\mu e}^i = F_{\lambda\mu eR}^i \omega^R. \quad (13)$$

Величины $F_e^i = F_e^j - F_i^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu e}^j$ (14)

имеют дифференциальные уравнения вида

$$\Delta F_e^i = dF_e^i + \{F_e^i\} - F_e^j \omega_\beta^\kappa - F_e^j \omega_\kappa^\beta = F_{eR}^i \omega^R, \quad (15)$$

где $F_{e\beta}^i = (F - F_{\lambda\mu}^i F_i^\mu) \delta_\beta^\lambda \delta_\kappa^\mu + 2F_{\lambda\mu}^i F_i^\lambda \delta_\beta^\mu + F_{\lambda\mu}^i F_e^j \delta_\beta^\mu$ – тензор, который при условии невырожденности $\Phi_1 = \det \|F_{\lambda\mu}^i\| \neq 0$ имеет обратный тензор $F_{\kappa\beta}^i$. Для величин $\Phi_\kappa^\alpha = F_{\kappa\beta}^i F_i^\beta$ дифференциальные уравнения

$$\Delta \Phi_\kappa^\alpha = d\Phi_\kappa^\alpha + \{\Phi_\kappa^\alpha\} - \omega_\kappa^\alpha = \Phi_{\kappa R}^\alpha \omega^R \quad (16)$$

показывают, что канонизация $\Phi_\kappa^\alpha = 0$ делает формы ω_κ^α главными. В дальнейшем мы будем считать, что все главные формы стоят в правых частях.

Геометрическим объектом $F_{\lambda\mu e}^i$ охватываются объекты

$$\Phi_{\kappa\alpha}^i = F_{\alpha\beta}^i \omega_\kappa^\beta, \quad \Phi_{\alpha\beta}^i = F_{\alpha\beta}^k \omega_k^i, \quad \tilde{\Phi}_\delta^i = \phi_{i\delta}^i \quad (17)$$

с дифференциальными уравнениями

$$\Delta \Phi_{\kappa\alpha}^i = d\Phi_{\kappa\alpha}^i + \{\Phi_{\kappa\alpha}^i\} - (m+1)\omega_{\kappa\alpha}^i + \delta_\kappa^\lambda \omega_{\lambda\alpha}^\beta = \Phi_{\kappa R}^i \omega^R,$$

$$\Delta \Phi_{\alpha\beta}^i = d\Phi_{\alpha\beta}^i + \{\Phi_{\alpha\beta}^i\} - (n-m)\omega_{\alpha\beta}^i - \delta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta}^\kappa - \delta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\beta}^\kappa = \Phi_{\alpha R}^i \omega^R, \quad (18)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}_\delta^i = d\tilde{\Phi}_\delta^i - \tilde{\Phi}_\delta^i \omega_\alpha^\beta + (n-m)\omega_{\beta\delta}^\alpha - (p+1)\omega_{\alpha\delta}^p = \tilde{\Phi}_{\delta R}^i \omega^R.$$

Эти уравнения позволяют провести канонизацию

$$\Phi_{\kappa\alpha}^i = \Phi_{\alpha\beta}^i = \tilde{\Phi}_\delta^i = 0, \quad (19)$$

при которой формы $\omega_{\kappa\alpha}^i$, $\omega_{\alpha\beta}^i$, $\omega_{\delta\beta}^i$ выражаются через формы $\omega_{\beta\gamma}^\kappa$ и $\omega_{\gamma\delta}^R$. Составим новые величины

$$F_{\lambda\mu\gamma}^i = F_{\lambda\mu}^i \cdot F_{\gamma\mu}^i; \quad \Phi_{\lambda\mu\gamma}^i = \frac{1}{3}(F_{\lambda\mu\gamma}^i + F_{\mu\gamma\lambda}^i + F_{\gamma\lambda\mu}^i), \quad \Phi_\alpha^i = F_\alpha^i - F_\ell^{\lambda\mu} \Phi_{\lambda\mu\ell}^i \quad (20)$$

причем

$$\Delta \Phi_\alpha^i = d\Phi_\alpha^i + \Phi_\beta \omega_\alpha^\beta - \Phi_\alpha \omega_\beta^\sigma + F_\alpha^\beta \omega_\beta^\delta = \Phi_{\alpha R}^i \omega^R. \quad (21)$$

Если наложить на поле F третье условие невырожденности $\Phi_2 = \det \|F_\alpha^\beta\| \neq 0$, то найдется тензор \bar{F}_α^β , обратный к F_α^β . Тогда дифференциальные уравнения

$$\Delta \tilde{\Phi}_\alpha^i = d\tilde{\Phi}_\alpha^i - \tilde{\Phi}_\beta \omega_\alpha^\beta - \tilde{\Phi}_\alpha \omega_\beta^\delta + \omega_\beta^\delta = \bar{\Phi}_{\alpha R}^i \omega^R \quad (22)$$

величин

$$\tilde{\Phi}_\alpha^i = \bar{F}_\alpha^\beta \Phi_\beta^i \quad (23)$$

позволяют выполнить канонизацию $\tilde{\Phi}_\alpha^i = 0$, в результате которой $\omega_{\beta\alpha}^i$, а следовательно и в силу (19), формы $\omega_{\beta\gamma}^\kappa$, $\omega_{\gamma\delta}^R$ становятся главными. Все построенные до сих пор объекты охватываются фундаментальным объектом второго порядка. Продолжая уравнения (16), мы получим дифференциальные уравнения объектов третьего порядка

$$\Delta \Phi_{\kappa\beta}^i = d\Phi_{\kappa\beta}^i + \{\Phi_{\kappa\beta}^i\} - \Phi_\kappa^i \omega_{\lambda\beta}^\lambda - \omega_{\kappa\beta}^\lambda = \Phi_{\kappa R}^i \omega^R,$$

$$\Delta \Phi_{\kappa\beta}^i = d\Phi_{\kappa\beta}^i + \{\Phi_{\kappa\beta}^i\} = \Phi_{\kappa R}^i \omega^R.$$

Для величин $\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^i = \Phi_{\kappa\beta}^i - \Phi_\kappa^i \omega_{\lambda\beta}^\lambda$ дифференциальные уравнения имеют вид: $d\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^i + \{\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^i\} - \omega_{\kappa\beta}^\lambda = \tilde{\Phi}_{\kappa R}^i \omega^R$.

Отсюда видно, что, проводя канонизацию $\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^i = 0$, формы $\omega_{\kappa\beta}^\lambda$ становятся главными. Учитывая теперь, что часть форм стали главными, $\Delta F_{\lambda\mu\gamma}^i = dF_{\lambda\mu\gamma}^i + \{F_{\lambda\mu\gamma}^i\} - \omega_{\lambda\mu\gamma}^i = \tilde{F}_{\lambda\mu\gamma}^i \omega^R$, $\Delta F_{\lambda\mu\kappa}^i = dF_{\lambda\mu\kappa}^i + \{F_{\lambda\mu\kappa}^i\} - F_{\lambda\mu}^i F_{\mu\kappa}^j \omega_{jk}^i - \omega_{\lambda\mu\kappa}^i = \tilde{F}_{\lambda\mu\kappa}^i \omega^R$. При канонизации $F_{\lambda\mu\gamma}^i = 0$, $F_{\lambda\mu\kappa}^i = 0$ формы $\omega_{\lambda\mu\gamma}^i$ обращаются в главные, а

$$\omega_{\lambda\mu\kappa}^i = -F_{\lambda\mu}^i \omega_{\mu\kappa}^j - \tilde{F}_{\lambda\mu\kappa}^i \omega^R. \quad (24)$$

Наконец, для получения форм $\omega_{\kappa\mu\gamma}^i$ обратимся к относительному инварианту $\Phi = \det \|F_\kappa^\beta\|$, дифференциальное уравнение которого имеет вид $\Delta \Phi = d\Phi - \Phi [a\omega_\kappa^\mu + b\omega_\mu^\kappa] = \hat{F}_\kappa^\mu \omega_\mu^\kappa + \hat{F}_\mu^\kappa \omega_\kappa^\mu + \hat{F}_\mu^\mu \omega_\mu^\mu$, где $a = m(m+1)$, $b = \frac{1}{2}(n-m)(m+1)(m-4)$. Введем в рассмотрение тензоры $\hat{F}_{\lambda\mu\gamma}^i = F_{\lambda\mu\gamma}^i - \Phi_{\lambda\mu\gamma}^i$, $\hat{\Phi}_\delta^i = \hat{F}_i^\mu \hat{F}_\mu^\delta$ и симметрический по κ и ℓ тензор $\Phi_{\kappa\ell} = \hat{F}_\kappa^\mu \hat{F}_\ell^\nu \hat{F}_\mu^\kappa \hat{F}_\nu^\ell$ с дифференциальными уравнениями

$$\Delta \Phi_{\kappa\ell} = d\Phi_{\kappa\ell} + \{F_{\kappa\ell}\} - \Phi_{\kappa\ell} (4a\omega_\ell^\kappa + (4b+1)\omega_\kappa^\ell) = \Phi_{\kappa R}^i \omega_{\kappa\ell}^i + \Phi_{\kappa\ell}^i \omega_{\kappa\ell}^i + \Phi_{\kappa\ell}^{\kappa\ell} \omega_{\kappa\ell}^i. \quad (25)$$

Запишем частичное продолжение уравнений (24)

$$\Delta \Phi_{\kappa\ell i} + \{F_{\kappa\ell i}\} - \Phi_{\kappa\ell i} (4a\omega_\ell^\kappa + (4b+1)\omega_\kappa^\ell) - \hat{\Phi}_{\kappa\ell j}^i \omega_{\ell j}^\kappa = \Phi_{\kappa R}^i \omega_{\kappa\ell i}^i.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, налагая на поле Γ четвертое условие невырожденности $\Phi_3 = \det \|\tilde{\Phi}_{kej}^P\| \neq 0$, используя обратный тензор $\tilde{\Phi}_s^{kei}$ для $\tilde{\Phi}_{kej}^P$ с помощью соответствующей канонизации $\tilde{\Phi}_{ie}^t = \Phi_{kpi} \tilde{\Phi}_{ep}^{kp} \delta^{it} = 0$, сделаем формы ω_{ik}^j , и следовательно, в силу (24) формы ω_{ijk}^i главными. Таким образом, все формы (4) выражены через базисные формы ω^R , что позволяет заключить, что пространство S_m'' является пространством с A -связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1); в результате чего возникают следующие структурные уравнения форм A -связности

$$d\omega^\alpha = \omega^k \wedge \omega_\beta + \Omega^\alpha,$$

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i,$$

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\beta^j \wedge (\delta_\alpha^k \omega_j^i - \delta_j^i \omega_\alpha^k) + \omega^k \wedge \omega_{\alpha k}^i + \Omega_{\alpha k}^i,$$

$$d\omega_{\alpha\beta}^i = \omega_{\lambda\mu}^j \wedge (\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu \omega_j^i - \delta_\alpha^\lambda \delta_j^\mu \omega_\beta^i - \delta_\beta^\mu \delta_j^\lambda \omega_\alpha^i) + \Omega_{\alpha\beta}^i,$$

$$d\omega_\beta^i = \omega_\gamma^k \wedge \omega_\gamma^i + \Omega_\beta^i,$$

$$d\omega_k^i = \omega_e^l \wedge \omega_e^i + \Omega_k^i.$$

Таким образом, в силу теоремы Лаптева-Картана с пространством S_m'' ассоциируется расслоение, наделенное A -связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1). В случае равенства нулю форм кривизны-кручения $\Omega = 0$ интеграл в подходящей системе координат выражается только через вторые производные.

Список литературы

- Митрофанова Е.А. Однородное пространство представления группы $A_m^p(n)$. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 62-63.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 16

1985

УДК 514.75

Ю.И. Попов

ОБ ОДНОМЕРНЫХ НОРМАЛЯХ ПЕРВОГО РОДА $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Настоящая работа является продолжением работ [7], [8] автора, посвященных построению общей теории регулярных трехсоставных распределений, которые мы назвали $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределениями [8]. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределение – это тройка распределений проективного пространства P_n , состоящая из базисного распределения 1-го рода τ -мерных линейных элементов $\Pi_\tau \equiv \Lambda$ (Λ -распределение), оснащающего распределения 1-го рода m -мерных линейных элементов $\Pi_m \equiv M$ ($m > \tau$) (M -распределение) и оснащающего распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов $\Pi_{n-1} \equiv H$ ($\tau < m < n-1$) (H -распределение) с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре X следующего вида: $X \in \Lambda \subset M \subset H$.

Исследование ведется относительно специализированного репера $\mathcal{R}_L(H, M)$ [8, §3].

Под одномерными нормалами 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения мы понимаем одномерные нормали 1-го рода оснащающего H -распределения. В дифференциальной окрестности 2-го порядка построены поля нормалей 1-го рода $\mathcal{P}(L_0)$ и $\mathcal{Q}(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, ассоциированные с нормалью Михэйлеску 1-го рода $\mathcal{M}(L_0)$. Построена конструкция, позволяющая с каждой одномерной нормалью \mathcal{V} 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения связать три однопараметрических пучка $(\mathcal{V}, \mathcal{P}_v)$, $(\mathcal{V}, \mathcal{Q}_v)$, $(\mathcal{V}, \mathcal{M}_v)$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, где $\mathcal{P}_v, \mathcal{Q}_v, \mathcal{M}_v$ – одномерные нормали H -распределения, соответствующие в обобщенном